

Reg. No. :

Code No. : 20710 B Sub. Code : AMMA 11

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

First Semester

Mathematics — Core

CALCULUS AND CLASSICAL ALGEBRA

(For those who joined in July 2020 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. $ax + by + c = 0$ என்ற வளைவரையின் வளைவு
_____.

(அ) b

(ஆ) a

(இ) 0

(ஈ) ஏதுமில்லை

The curvature of the curve $ax + by + c = 0$ is
_____.

(a) b

(b) a

(c) 0

(d) none of the above

2. $y = e^x$ என்ற வளைவரைக்கு $(0, 1)$ ல் வளைவு ஆரம் _____.

- (அ) 1 (ஆ) 2
(இ) $2\sqrt{2}$ (ஈ) ஏதுமில்லை

The radius of curvature of $y = e^x$ at $(0, 1)$ is _____.

- (a) 1 (b) 2
(c) $2\sqrt{2}$ (d) none of the above

3. $\int_1^b \int_1^a \frac{dxdy}{xy}$ ன் மதிப்பு _____.

- (அ) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (ஆ) $\log(ab)$
(இ) $\log a \log b$ (ஈ) ஏதுமில்லை

The value of $\int_1^b \int_1^a \frac{dxdy}{xy} =$ _____.

- (a) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (b) $\log(ab)$
(c) $\log a \log b$ (d) none of the above

4. $u = x + y$, $v = x - y$ ன் இயக்கோபியன் _____.

- (அ) 2 (ஆ) 1
(இ) -2 (ஈ) ஏதுமில்லை

The Jacobian of $u = x + y$ and $v = x - y$ is _____.

- (a) 2 (b) 1
(c) -2 (d) none of the above

5. $\int_0^1 x^2(1-x)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (அ) 2 (ஆ) $\frac{1}{12}$
(இ) $\frac{1}{3}$ (ஈ) ஏதுமில்லை

$\int_0^1 x^2(1-x)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (a) 2 (b) $\frac{1}{12}$
(c) $\frac{1}{3}$ (d) none of the above

6. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (அ) $\frac{\pi}{2}$ (ஆ) $\frac{\pi}{3}$
(இ) $\frac{\pi}{4}$ (ஈ) ஏதுமில்லை

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) none of the above

7. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ என்ற மூலத்தையுடைய சமன்பாட்டின் குறைந்தபடி _____.

- (அ) 3 (ஆ) 2
(இ) 4 (ஈ) ஏதுமில்லை

The least degree of the equation with rational coefficients one of whose roots $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ is

- (a) 3 (b) 2
(c) 4 (d) none of the above

8. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ எனில் $\sum \frac{1}{\alpha}$ ன் மதிப்பு _____.

- (அ) $-\frac{q}{r}$ (ஆ) $\frac{q}{r}$
(இ) $\frac{p}{r}$ (ஈ) ஏதுமில்லை

If α, β, γ are the roots of $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ then

$$\sum \frac{1}{\alpha} = \text{_____}.$$

(a) $-\frac{q}{r}$

(b) $\frac{q}{r}$

(c) $\frac{p}{r}$

(d) none of the above

9. $x^n + 1 = 0$ (n இரட்டைப்படை எண்) என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் _____.

(அ) அனைத்தும் கற்பனை

(ஆ) $(n - 1)$ கற்பனை

(இ) $(n - 2)$ கற்பனை

(ஈ) ஏதுமில்லை

The roots of the equation $x^n + 1 = 0$ (n is even) are _____.

(a) all imaginary

(b) $(n - 1)$ imaginary

(c) $(n - 2)$ imaginary

(d) none of the above

10. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களில் ஒன்று -2 எனில், மற்ற மூலங்கள் _____.

(அ) $-2, -1$ (ஆ) $-\frac{1}{2}, 1$

(இ) $-\frac{1}{2}, -1$ (ஈ) ஏதுமில்லை

One of the roots of the equation $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ is -2 , the other roots are _____.

(a) $-2, -1$ (b) $-\frac{1}{2}, 1$

(c) $-\frac{1}{2}, -1$ (d) none of the above

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ என்ற வளைவரையின் p-r சமன்பாடு கண்டுபிடி.

Find the p-r equation (pedal equation) of the curve $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

Or

(ஆ) $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற வளைவரைக்கு $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

என்ற புள்ளியில் வளைவு மையத்தைக் காண்.

Find the coordinates of the center of curvature of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$ at

$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

12. (அ) $y^2 = 4ax$ மற்றும் $x^2 = 4ay$ என்ற வளைவரைகளுக்கு பொதுவாக உள்ள பகுதியின் பரப்பளவு காண்க.

Find the area of the region common to $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

Or

- (ஆ) $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,
எனில் $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ கண்டுபிடி. (நேரடியாக பிரதியிடாமல்)

If $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,
evaluate $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ without actual substitution.

13. (அ) $\left\lfloor \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rfloor = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$ where $n = 0, 1, 2, \dots$ என்று நிறுவு.

Prove that $\left\lfloor \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rfloor = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$ where $n = 0, 1, 2, \dots$

Or

(ஆ) $\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ என

நிறுவு.

Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right).$$

14. (அ) $x^7 - x^4 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் ஆறாம் படியின் கூடுதல் 3 என்று நிரூபி.
Show that the sum of the 6th powers of the roots of $x^7 - x^4 + 1 = 0$ is 3.

Or

- (ஆ) α, β, γ என்பன $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனில் $\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைத் தருவி.
If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, form the equation whose roots are $\alpha\beta, \alpha\gamma$ and $\beta\gamma$.

15. (அ) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 3x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூன்றாவது உறுப்பை நீக்கி கிடைக்கும் மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு காண்.
Transform the equation $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 3x + 2 = 0$ into an equation with the third term absent.

Or

(ஆ) $x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{72} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் விகிதமுறு கெழுக்களை நீக்குக.

Remove the fractional coefficient from the equation $x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{72} = 0$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $y = x \log x$ என்ற வளைவரைக்கு, $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக உள்ள புள்ளியில் வளைவு மையத்தைக் காண்.

Find the coordinates of the center of curvature of $y = x \log x$ at the point where $\frac{dy}{dx} = 0$.

Or

(ஆ) ஆஸ்ட்ராய்டு $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ன் வளைவு மையத்தின் நியமப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

Find the evolute of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

17. (அ) $\int_0^1 \int_y^{2-y} xy dx dy$ என்ற தொகையீட்டின் வரிசையை

மாற்றி மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

By changing the order of integration,

evaluate the integral $\int_0^1 \int_y^{2-y} xy dx dy$.

Or

(ஆ) போலார் தளத்திற்கு மாற்றுவதன் மூலம்

$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4}$ என நிரூபி. மற்றும்

$\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு.

By changing into polar coordinates, show

that $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4}$. Hence evaluate

$\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

18. (அ) காமா சார்பின் மூலம் $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ கணக்கிடு

மற்றும் $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$ கண்டுபிடி.

Evaluate $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ in terms of gamma

functions and hence find $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$.

Or

(ஆ) காமா சார்பை பயன்படுத்தி

$\iint xy(1-x-y)^{1/2} dx dy$ யைக் காண். இங்கு D

என்பது $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ (மிகை காற்பகுதியில்) எல்லைகளாக கொண்டது.

Using gamma functions evaluate $\iint xy(1-x-y)^{1/2} dx dy$ over the area enclosed by the lines $x=0$, $y=0$ and $x+y=1$ in the positive quadrant.

19. (அ) $6x^2 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இசைத்தொடர் வரிசையில் இருந்தால், சமன்பாட்டைத் தீர்.

Solve $6x^2 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ where roots are in harmonic progression.

Or

(ஆ) $a + b + c + d = 0$ என இருந்தால்

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{3}$$

என்று நிரூபி.

If $a + b + c + d = 0$, show that

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{3}$$

20. (அ) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களில் ஒன்றை குறைத்து கிடைக்கும் எண்களை மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு தலைகீழ் சமன்பாடு எனக் காட்டு. அதன் மூலம் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் தீர்.

Show that the equation $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$ can be transformed into a reciprocal equation by diminishing the roots by unity. Hence solve the given equation.

Or

- (ஆ) $6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்.

Solve the equation

$$6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0.$$